Vorlesung HMI IV B

Funktionentheorie („FT")

Sommersemester 2020

M. Fuchs

Vorlage: HMI Skript von Prof. Bildhauer

Wir halten uns an die dort vereinbarten Nummerierungen für Sätze, Definitionen, etc.; dies gilt auch für Zitate aus HMI I-III.

$\boxed{\text{Kapitel 22}}$: Einführung in die „FT"

Das Konzept der Ableitung für Funktionen
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. HMI 1)

(*) $f'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

Differenzenquotient

hat $\boxed{\text{kein}}$ Analogon für Funktionen
$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $\boxed{m \geq 2}$
(„Division durch Vektoren")

es gibt komplizierte Konzepte:
totale Ableitung, partielle Ableitung,

Richtungsableitung (→ Kap. 17)

<u>Sonderfall</u>:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(m = n = 2)$

da $\boxed{\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}}$ und man in $\mathbb{C}$ <u>dividieren</u> kann. Die Definition ⊛ macht also Sinn!

<u>Funktionen-theorie</u> "FT"	⟺	<u>Diskussion</u> von Fkten. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit ⊛ und <u>Auswertung</u> der Eigenschaft ⊛

Klingt langweilig, wenn man sich darunter nur eine wörtliche Übertragung der Differentialrechnung für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vorstellt!

Tatsächlich ist ⊛ im Komplexen viel stärker, z.B.:

Satz von Liouville:

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfüllt ⊛ an jeder Stelle, d.h. $f'(z_0) := \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Ist dann f beschränkt, so ist f konstant

⟨ Fundamentalsatz der Algebra als Korollar! ⟩

Falsch im Reellen ! Gegenbspl.:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) := \sin t$

Folgende Fakten werden aus Kap. 7 vorausgesetzt:

- $\mathbb{C}$ als Körper der komplexen Zahlen,
  komplexe Potenzreihen z.B.
  Exponentialfunktion $\boxed{e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k}$

- topologische Begriffe:
  - offene, abgeschlossene Mengen, ...
  - Konvergenz von Folgen und Reihen, ...

  dieselben Konzepte wie in $\mathbb{R}^2$!

Beispiele: zunächst ist

$\boxed{\mathbb{C} = \mathbb{R}^2}$, d.h.:

$\boxed{1+4i = (1,4)}$ mit

$i = (0,1)$ imaginäre Einheit;

$\boxed{i^2 = -1}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gemäß $t = t + 0i$

Multiplikation in $\mathbb{C}$: $(a, b, x, y \in \mathbb{R})$

$(x+iy)\cdot(a+ib) =$

$xa + ixb + iya - yb =$

$xa - yb + i(xb+ya)$

Konjugation: $\overline{1+2i} = 1-2i$;

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy)$$
$$= x^2 + y^2 = |z|^2;$$

$|\cdot|$ = Euklidische Norm auf $\mathbb{C}$

($\rightarrow$ Konvergenz, top. Begriffe bzgl. $|\cdot|$);

Division: $z \in \mathbb{C} - \{0\} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$

$$\boxed{\frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}}$$

22.1 Holomorphe Funktionen

("komplexe Differenzierbarkeit")

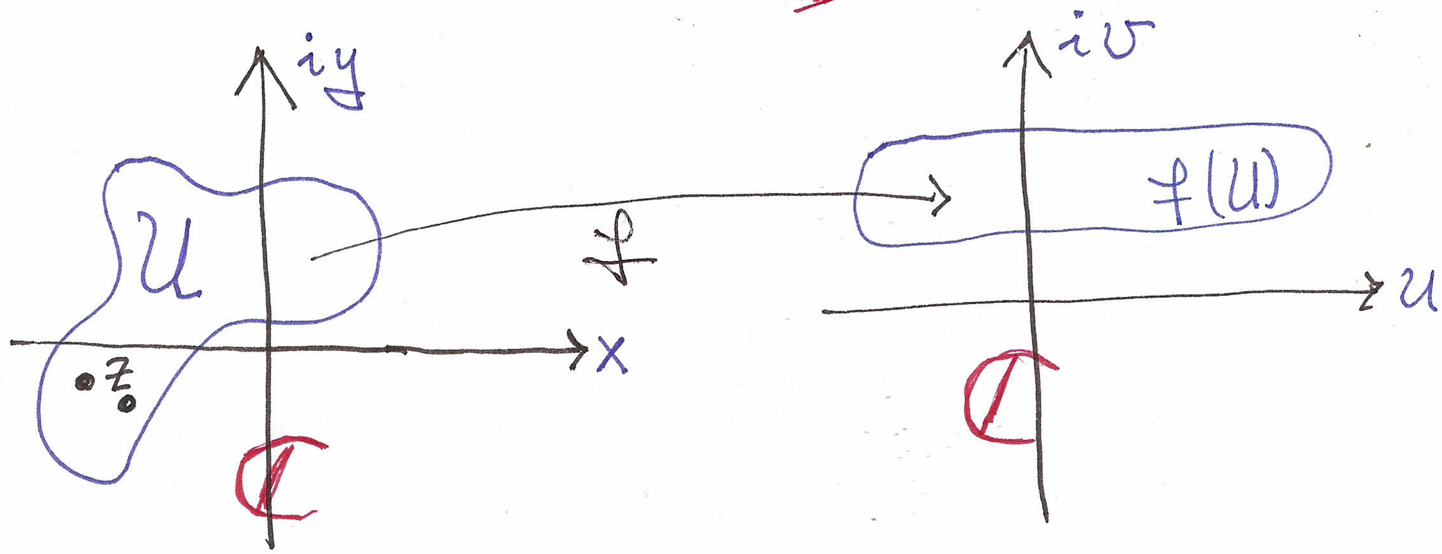
Wir benutzen die üblichen Notationen für Funktionen im Komplexen, also:

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$,

$f : \mathbb{C} \supset \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$\boxed{f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)}$ Real- und Imaginärteil von f

(also $u, v : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$)



Def 22.1.1:

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ $\boxed{\text{offen}}$ und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$.

i) Sei $z_0 \in \mathcal{U}$. f heißt in z_0 <u>komplex differenzierbar</u> $:\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$

<u>existiert</u> in $\mathbb{C}$. Diese komplexe Zahl wird dann mit $f'(z_0)$ bezeichnet und heißt (komplexe) Ableitung von f im Punkt z_0.

ii) f heißt <u>holomorph auf $\mathcal{U}$</u> (oder <u>komplex diff'bar auf $\mathcal{U}$</u> oder <u>regulär auf $\mathcal{U}$</u>)

$:\Longleftrightarrow$ $f'(z_0)$ existiert für <u>alle</u> $z_0 \in \mathcal{U}$

Die komplexe Ableitung ist dann eine Funktion $f': U \to \mathbb{C}$.

Bem: o) Schreibweisen: $\frac{df}{dz}(z_0)$,

$\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$ statt $f'(z_0)$

i) rekursive Definition höherer Ableitungen:

$f'' := (f')'$, $f''' := (f'')'$, ...

$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$, ...

ii) Beobachtung: $\boxed{f \text{ diff'bar in } z_0 \implies f \text{ stetig in } z_0}$

(genau wie im Reellen!)